MAI 1 – 10. cvičení „písemné" (náhradní za 30.4.2020)

V dnešním a příštím cvičení („písemných") se budeme věnovat „primitivním funkcím" (neboli neurčitým integrálům) – – dnes bychom probrali hlavně ty základní cesty k výpočtu primitivních funkcí k daným funkcím (v intervalu) v „jednodušších" případech, příště bychom zkusili integrování trochu náročnější, také integraci racionální funkce (jednodušší příklady) a ukážeme si několik speciálních substitucí (říká se jim „vhodné" substituce), které pak, vlastně „opačně" provedené substituce, vedou k integraci fcí racionálních.

Budeme se snažit základní „principy" výpočtu primitivních funkcí si ukázat a vysvětlit, vždy na několika příkladech z těch pro dnešní a příští cvičení zadaných, a prosím, abyste si pak zkusili vypočítat některé z těch příkladů dalších, a napište mi, prosím, jak vám integrování „jde", zda máte s něčím problém (pak se pokusím o další vysvětlení příště), a nebo zda už vše umíte z minulé doby „středoškolské" – budu moc ráda, budete-li reagovat na „dnešní cvičení".

Myslím, že bude „dobré" na začátku si udělat něco jako „mapu" cest k výpočtu integrálu a k tomu přidat návody, jak (a proč) si vybrat tu „správnou" cestu. A to je podobné jako bylo rozhodování o způsobu výpočtu limit (funkce i posloupnosti) – „cesty" jsme znali, ale důležité bylo umět si tu cestu „vybrat"!

Tedy shrnutí (takový „tahák") – stručně o primitivní funkci:

$f(x)$ je funkce daná, definovaná na (a,b),
primitivní funkci k f na (a,b) budeme značit $F(x)$ (jak je obvyklé)

1. Existence primitivní funkce:

$f(x)$

spojitá v (a,b) ⇒
⇒ f má v (a,b) fci primitivní

f má Darbouxovu vlastnost, a f není spojitá v (a,b)
?? (nevíme)
(zajímavé problémy)

f nemá v (a,b) Darbouxovu vlastnost ⇒
⇒ f nemá v (a,b) primitivní funkci

2. $f(x)$ spojitá v (a,b) (tj. má primit. fci v (a,b))

je mnoho funkcí, spojitých v (a,b), které mají primitivní, ale tyto primitivní fce nelze vyjádřit pomocí našich „známých" elementárních funkcí – (e^{-x^2}, $\sin(x^2)$, $\frac{\sin x}{x}$, a další)

primitivní fce $F(x)$ lze vyjádřit pomocí elementárních fcí – takové „jednodušší" budeme počítat
(„učitel" má vědět, co „nám" „integrál přijde")

(pak se užívá pro vyjádření často i nekonečné řady) – důkazy jsou dost „složité"
(

3. $f(x)$ je spojitá v (a,b) a primitivní lze vyjádřit „pomocí „našich" elementárních funkcí" – jak se dostaneme k cíli – tj. k primitivní funkci $F(x)$ k $f(x)$ v (a,b):

(i) základní důležitá pomůcka – „tabulka" primitivních funkcí k základním funkcím (neboli tabulka derivací „čtená" pozpátku (v zahraniční literatuře se primitivní fci často říká „antiderivace") – budeme si zde psát „T"

(ii) najít primitivní funkci k f je pak znamená vlastně – najít cestu od zadané funkce ke „tabulce" T (někdy se to zdaří v celém intervalu – to bude dnes, někdy budeme muset interval (a,b) „rozdělit" a pak primitivní funkce z částí „slepit" – později cvičení.

(iii) a „mapa" cest (od $f(x)$ k $\int f(x)dx$):

$f(x)$

„T" → **přímo k tabulce**, když $f(x)$ je lineární kombinací „tabulkových" funkcí (linearita neurčitého integrálu)

„S" → **substituce** (většina) „cesta zpět" od derivace složených funkcí

- „přímá" cesta: pro $\int f(g(x))\cdot g'(x)dx$ – zde důležité odhalit! dvojici $g(x)$, $g'(x)$
- cesta „opačná": $\int f(x)dx$ se nahradí „výrazem" $\int f(g(t))\cdot g'(t)dt$ – ? $g(t)$ – volba je podstatná!

PP → **per partes** („speciální" cesta) „cesta „zpět" od derivace součinu" (hodí se pro integraci součinu funkcí, z nichž aspoň jedna „umíme" integrovat)

(iv) „substituce" v integrálu (zde souhrnné označení, „věty s předpoklady jsou v přednášce) –
– spíše návod k „počítání":

1) (*) $\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + c, \quad x \in (a,b)$

snadné! – když v integrálu „najdeme" dvojici $g(x)$, $g'(x)$ (k tomu je třeba „umět" derivace), pak integrujeme zde vnější funkci, tj.

$\int f(y)\,dy = F(y)$, a pak opět k (*)!

2) (**) $\int f(x)\,dx$ – když „neumíme", tak občas pomůže „šikovný nápad" – místo (**) integrovat

$\int f(g(t))\cdot g'(t)) = G(t)$ – „šikovnost" nápadu nahradit $x \to g(t)$ spočívá v tom, že pak $\int f(g(t))\,g'(t)\,dt$ je „jednodušší" než ten na začátku (i když napsán tak nevypadá), a když známe $G(t)$, pak

$\int f(x)\,dx = F(x) = G(g^{-1}(x)) + c$ (konkrétní substituce, náročnější předpoklady na $g(t)$ – viz níže – budeme „počítat" příště)

A než se „dáme" do počítání integrálů, ještě dvě poznámky:

1. Při počítání integrálů mohou být substituce i integrace per partes užity opakovaně, a někdy se lze dvě cesty mohou i spojit a vystřídat – nejprve jdem cestou per partes a pak pokračujeme substitucí, někdy se jde i obráceně – nejprve substituce, pak per partes – příklady si ukážeme.

2. Jeden „druh" funkcí, o kterých je dokázáno, že primitivní funkce k nim lze vyjádřit funkcemi elementárními, jsou funkce racionální – budeme tedy cvičit jednodušší případy. Ne vždy se ale výpočet „zdaří", záleží to na tom, zda se podaří najít všechny kořeny polynomu ve jmenovateli příslušné racionální funkce (často „to" počítat neumíme)

3. Poznámka k „zadání" příkladů integrálů pro cvičení (tedy i příště): (třetí, omlouvám se) integrály" jsou rozděleny do skupin, tak, že se dají „pak řešit stejným způsobem (a ten je vždy nadepsán) – kvůli „tréninku" vidění vlastností integrálu, což pak umožní vybrat na „rozcestí" tu dobrou cestu k cíli (na tabuli).

Příklady výpočtu primitivních funkcí:

1) k funkcím blízko „tabulce":

a) • $\int \left(3e^x + \frac{1}{x}\right)dx$: (i) $f(x) = 3e^x + \frac{1}{x}$ je spojitá v $(-\infty, 0)$ i v $(0, +\infty)$ $\Rightarrow$ k f v těchto intervalech existují fce primitivní

(ii) $\int e^x dx$ a $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ jsou na „tabulce", tak užitím linearity jsme „tam" skoro hned:

$$\int \left(3e^x + \frac{1}{x}\right)dx = 3\int e^x dx + \int \frac{1}{x} dx = 3e^x + \ln|x| + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$x \in (0, +\infty)$, $x \in (-\infty, 0)$.

• $$\int \left(5\sqrt{x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = 5\int \sqrt{x}\,dx + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx \underset{T}{=} \frac{10}{3} x^{\frac{3}{2}} + \operatorname{tg} x + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$\left.\begin{array}{l} \int \sqrt{x}\,dx \underset{T}{=} \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C_1, \ x > 0 \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C_2, \\ \quad x \in \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right), \ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\}$$

$x \in (0, \frac{\pi}{2})$ a $x \in \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{N}$ (opět – zde funkce spojité)

• $\int \left(\sqrt[3]{x} + x^5\right)dx$ analogicky

- $$\int \frac{x^3-1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2-\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\int x^2dx-\int \frac{1}{x}dx\right) \underset{T}{=}$$

musíme trochu cestu na tabulku „připravit"

$$\underset{T}{=} \ \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\ln|x|\right)+C,$$

$x\in(-\infty,0)$, $x\in(0,+\infty)$

- $$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int 1\,dx-\int\frac{1}{1+x^2}\,dx = x-\operatorname{arctg}x+C$$
$x\in\mathbb{R}$

trochu horší úprava pro tabulku – ale je to v „takovéto skupině", tak to „jde"

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1-\frac{1}{x^2+1}$$

- $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx$ – zkuste podobně (sami)

- $$\int \operatorname{tg}^2x\,dx = \int\frac{\sin^2x}{\cos^2x}\,dx = \int\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}\,dx = \int\frac{1}{\cos^2x}\,dx-\int 1\,dx = \operatorname{tg}x-x+C$$
$x\in\left((2k-1)\frac{\pi}{2},(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$

Příklady podrobně „rozepisuji", vy nemusíte (ale měli byste umět vždy postup „obhájit".

b) jednoduchý „vzorec" integrálů $\int f(ax+b)\,dx$, $a\neq 0$;

„znáte-li $\int f(x)\,dx$ (říkám tomu z legrace „skorotabulka"):

je-li $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, pak $\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a}+C$

(předpokládáme, že „vše" je definováno)

$\int f(ax+b)\,dx$ lze řešit substitucí, ale rychleji, že je to i „vidět", umíte-li derivovat (a víte-li, že $F'(x)=f(x)$ v J)

T:

$$\int e^{-x}\,dx = \left(\frac{e^{-x}}{(-1)}\right) = -e^{-x} + C, \quad x\in R \qquad - \qquad T: \int e^x dx = e^x + C$$

a zde $a=-1$

$$\int e^{4x-1}\,dx = \frac{e^{4x-1}}{4} + C, \quad x\in R$$

$\int e^x dx = e^x + C$, $a=4, b=-1$

$$\int \cos(3x+2)\,dx = \frac{\sin(3x+2)}{3} + C, \quad x\in R$$

T: $\int \cos x\,dx = \sin x$ $(a=3, b=2)$

$$\int \sqrt{3x-2}\,dx = \int (3x-2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{(3x-2)^{3/2}}{3}\cdot\frac{2}{3}, \quad x\in\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

T: $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C$, $a=3, b=-2$

$$\int \frac{1}{5-x}\,dx = -\ln|5-x| + C, \quad x\in(-\infty,5), x\in(5,+\infty)$$

T: $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$, $a=-1$, $b=5$

další příklady z 1. a 2. řádku 1b) jistě zvládnete hravě, tak dále:

$$\int \frac{1}{4+x}\,dx = \ln|4+x| + C, \quad x\in(-\infty,-4), x\in(-4,+\infty),$$

ale! $\int \frac{1}{4+x^2}\,dx$ nebo $\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx$ $\Big\}$ vedou na tabulkový integrál $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x$:

$$\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2}\,dx = \frac{\operatorname{arctg}(2x)}{2} + C, \quad a=2, b=0$$

$x\in R$

a • $\displaystyle\int \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\cdot 2 + c =$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c,\ x\in\mathbb{R} \quad \left(a=\frac{1}{2}\right)$

(V „lepších" tabulkách lze najít i vzorec $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c$, – $a>0$, $x\in\mathbb{R}$

– ale my ho ani nepotřebujeme – umíme bez tabulek ↑)

a ještě lépe („dobré" pro integraci racionálních funkcí – později)

$\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx = \mathrm{arctg}(x+2) + c,\ x\in\mathbb{R}$

($a=1$ zde)

(pokud máme $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx$, kde $p^2-4q<0$ (tj. jmenovatel nemá reálné kořeny, pak na tabulku je cílem $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ vždy!)

a $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx$ – zkuste sami!

• a ještě integrály, jejichž cíl na tabulku je $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$, $x\in(-1,1)$

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\,dx = \frac{\arcsin(3x)}{3} + c,\quad x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

($a=3, b=0$)

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\,dx = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}} + c =$

$x\in(-3,3)$

$\displaystyle = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + c \quad \left(a=\frac{1}{3}\right)$

A jistě je ve skupině integrál, který „nevypadá", že patří mezi ty vyřešené:

- $$\underline{\int \sin^2 x\,dx} \underset{(*)}{=} \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \underline{\frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + C}$$

ale lze užít vyjádření $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ $\left(\text{analog. } \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)$ –

– odvodí se ze vzorce $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,

a pak už je snadné (*)

$\int \cos^2 x\,dx$ už jistě „vidíte".

2. <u>Věta o substituci:</u>
<u>užití pro integrál</u>

$$\begin{cases} \text{Je-li } \int f(y)\,dy = F(y) + c, \text{ pak } \text{"} \\ (*) \int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx \;\text{"}{=}\; F(g(x)) + C \end{cases}$$

(znění věty je v přednášce, i se zadáním předpokladů pro ověření)
s předpoklady

<u>A jak?</u> hledáme dvojici $g(x)$, $g'(x)$ $\leftrightarrow$ $g(x)$ je vnitřní funkce v nějaké „složené" funkci, a pokud je tato složená funkce vynásobena $g'(x)$ – pak integrace je „vidět" – je to přímo výsledek derivace složené funkce $F(g(x))$, kde $\underline{F'(y) = f(y)}$, tedy – stačí „umět" integrovat jen vnější funkci (proto se „říká", že děláme substituci – jako

$g(x) = y$)

Důležité je tedy derivace „umět", nebo lépe „vidět", dohromady spolu s funkcí $g(x)$ – tj. „vidět" dvojici $\underline{g(x), g'(x)}$ v daném integrálu.

Příklady:

- $\int 2x e^{x^2} dx = \int e^{x^2}(x^2)' dx = e^{x^2} + C, \quad x \in R$

integrujeme tedy „jen" $\int e^y dy = e^y$ a slažíme s $y = x^2$

$\int e^{\sin x} \cdot \cos x \, dx = e^{\sin x} + C, \quad x \in R$ ... slažíme s $y = \sin x$

$= \int e^{\sin x} (\sin x)' dx =$

A jistě vidíte „návod": $\int e^{(*)} (*)' dx = e^{(*)} + C$

Může se stát, že derivace $g'(x)$ fce $g(x)$ v integrálu (*) není „celá", „chybí" konstanta – tu pak můžeme vždy lineárně „dodat":

- $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x})' dx$

$g(x) = \sqrt{x}$

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= 2 e^{\sqrt{x}} + C, \quad x \in (0, +\infty)$

a teď integrujeme opět „jen" $\int e^y dy = e^y + C$ a pak (dle nebo)

Podobně

- $\int \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}} dx$ (zkuste)

Další příklady:

(pokud už jste něco o substituci viděli dříve na střední škole, možná, že jste ji zapisovali jinak – já zatím uvádím zápis „z přednášky", ukážeme si to třeba později)

- $$\underbrace{\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx}_{x\in(0,+\infty)} = \underbrace{\int (\ln x)^2\cdot(\ln x)'}_{\text{(správně, není třeba psát) – ukazuje „návod"}} = \frac{\ln^3 x}{3} + C$$

tj. $g(x)=\ln x$ a $(\cdot = y)$

počítáme jen

$$\int y^2\,dy = \frac{y^3}{3} + C \quad \text{a „zpět"}$$

nebo (stejná substituce $\ln x = y$)

- $$\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx = \int \frac{1}{1+(\ln x)^2}(\ln x)'\,dx = \operatorname{arctg}(\ln x) + C$$

$x\in(0,+\infty)$

$g(x)=y$ počítáme

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \operatorname{arctg} y + C$$

(Často se integrace zapisuje takto:

$$\int \frac{1}{1+\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \left| \begin{matrix} \ln x = y, \\ \frac{1}{x} = y' \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \operatorname{arctg} y + C$$

$$= \operatorname{arctg}(\ln x) + C$$

– není tento zápis asi úplně „korektní", ale užívá se)

• $\int e^x \sin(e^x)\,dx = -\cos(e^x) + c, \quad x \in \mathbb{R}$

$g(x) = e^x \quad (=y)$
$g'(x) = e^x$

$\int \sin y\,dy = -\cos y + c$

• $\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx = \operatorname{arctg}(e^x+1) + c, \quad x \in \mathbb{R}$

stejně: $g(x) = e^x$

$\int \frac{1}{y^2+2y+2}\,dx \underset{\text{(minule)}}{=} \int \frac{1}{(y+1)^2+1}\,dy = \operatorname{arctg}(y+1) + c$
$y \in \mathbb{R}$

• $\int \cos^3 x \cdot \sin x\,dx = -\int (\cos x)^3(-\sin x)\,dx = -\frac{\cos^4 x}{4} + c, \quad x \in \mathbb{R}$

$g(x) = \cos x$
$g'(x) = -\sin x$

$-\int y^3\,dy = \frac{-y^4}{4} + c$

? ale
• (*) $\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx =$

(„i to" jde)

$= \int \sin x\,dx + \int \cos^2 x(-\sin x)\,dx =$

$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c, \quad x \in \mathbb{R}$

A důležitý (a užitečný) typ integrálu (předpokládáme, že platí to, co je „třeba")

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + c, \quad g'(x) \text{ je spojitá v } J,\ g(x) \neq 0 \text{ v } J$$

VS

$g(x) = y$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| + c$$

Příklady:

$$\int \frac{2x}{4+x^2}\,dx = \ln(4+x^2) + c,\ x \in R \qquad \left((4+x^2)' = 2x\right)$$

$$\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + c,\ x \in R \qquad \left((1+x^4)' = 4x^3\right)$$

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx = \ln(x^2+4x+5) + c,\ x \in R \qquad \left(\underbrace{(x^2+4x+5)}_{>0\ \forall x \in R}{}' = 2x+4\right)$$

$$\int \frac{x-3}{x^2+4x+5} = ?$$

$x-3 \neq (x^2+4x+5)'$, ale zaředí se to „a uspořádá", že umíme integrál spočítat:

$$\int \frac{x-3}{x^2+4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx - 5\int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) - 5\,\mathrm{arctg}(x+2) + c,\quad x \in R$$

(důležitá „část" integrace racionální funkce)

Zkuste sami další příklady užití substituce, ukážeme si ještě užití integrace per partes (čtení „pozadu" vzorce pro derivaci součinu:

$$(fg)' = f'g + fg' \qquad \Big| \int \qquad \left(\int f' = f + c\right)$$

$$fg = \int f'g + \int fg' \text{, tj. odtud}$$

<u>Vzorec:</u> $\displaystyle\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

$(f', g'$ spojité v $(a,b))$

užijeme pro součin dvou funkcí, z nichž aspoň jednu „umíme" integrovat – proto „per partes":

<u>Příklady:</u>

$\displaystyle\int x \cdot \sin x \, dx = \, ?$ (aspoň víme, že integrál existuje v R!)

„umíme" integrovat obě funkce – $\displaystyle\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

$\displaystyle\int \sin x \, dx = -\cos x + C$,

ale snažíme se získat užitím integrace per partes integrál $\int f(x)g(x)dx$, který není „horší" než ten na začátku – což by se stalo, pokud bychom integrovali „x" – tedy užijeme $g(x) = x$, $f(x) = \sin x$, tedy

$$\int x \sin x \, dx = \begin{vmatrix} f'(x) = \sin x, & f(x) = -\cos x \\ g(x) = x, & g'(x) = 1 \end{vmatrix} = -\cos x \cdot x - \int(-\cos x)dx =$$

$$= -x \cdot \cos x + \int \cos x \, dx = -x\cos x + \sin x + C, \; x \in R$$

• $\int x^3 \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} f'(x) = x^3 \to f(x) = \frac{x^4}{x} \\ g(x) = \ln x \to g'(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right| =$

zatím" umíme "$(\ln x)'$, ne $\int \ln x \, dx$,

tedy výběr „jasný" – snad to dolní „dopadne"

$$= \frac{x^4}{4} \ln x - \int x^3 \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \int x^2 dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^3}{3} + C,$$

$x \in (0, +\infty)$

• $\int x^2 \cos x \, dx = \left| \begin{array}{ll} f' = \cos x, & f = \sin x \\ g = x^2, & g' = 2x \end{array} \right| \underset{pp}{=} x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx =$

budeme se snažit „likvidovat x^2" – tj. integrace pp. $2x$!

$$= \left| \begin{array}{ll} f' = \sin x, & f = -\cos x \\ g = x, & g' = 1 \end{array} \right| =$$

$$= x^2 \sin x - 2 \left(-x \cos x - \int (-\cos x) dx \right) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

$x \in \mathbb{R}$

A dva speciální případy: (další „finty")

1) $\int \ln x \, dx \underset{ale}{=} \int 1 \cdot \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} f' = 1, & f = x \\ g = \ln x, & g' = \frac{1}{x} \end{array} \right| \underset{pp}{=}$

(jen jedna fce!)

$$= x \ln x - \int \underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{=1} dx = x \ln x - x + C,$$

$x \in (0, +\infty)$!

2) nepodaří se „lepší" integrál, ale stejný, který byl „na začátku" – a pak hledaný integrál bude řešením rovnice pro tento integrál I.

$$\int \sin^2 x\,dx = \left| \begin{array}{ll} f' = \sin x, & f = -\cos x \\ g = \sin x, & g' = \cos x \end{array} \right| = -\sin x . \cos x + \int \cos^2 x\,dx$$

(volba je tady „jasná")

$$= \left| \begin{array}{ll} f' = \cos x & f = \sin x \\ g = \cos x & g' = -\sin x \end{array} \right| = -\sin x . \cos x + \sin x . \cos x - \int -\sin^2 x\,dx, \text{ tj.}$$

zkusme ještě jednou integraci pp (což jsme tak uspěli dobře)

výsledek: $\int \sin^2 x\,dx = \int \sin^2 x\,dx$,

což je pravda, ale přímo integrál nemáme –

Tak jak? vrátíme-li se o jednu integraci zpět, máme:

$$\int \sin^2 x\,dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\,dx = -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x)\,dx$$

$$= -\sin x . \cos x + x - \int \sin^2 x\,dx, \text{ a odtud:}$$

$$2 \int \sin^2 x\,dx = x - \sin x \cos x + C \implies$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C, \quad x \in R \qquad \nabla$$

A dále přehledně integrály, a zkuste mi napsat, co byste potřebovali ještě „vyjasnit", děkuji.